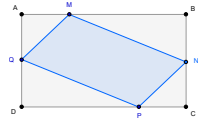




Exemple de réalisation

091

Le parallélogramme qui tourne



1 Identification

Type
 Modalité
 Thème abordé
 Niveau
 Prérequis
 Objectif
 Réalisation technique
 Fichier(s)

Support de travail et de correction
 Salle informatique
 Notion de fonction
 Représentation graphique d'une fonction

Cycle 4
 2nde

Aire d'un triangle
 Théorème de Pythagore
 Développer une expression

Introduire une notion

Difficulté : ★★★

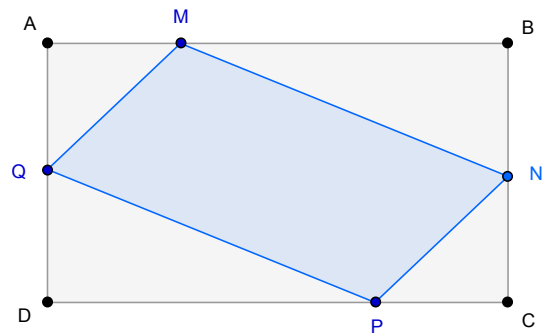
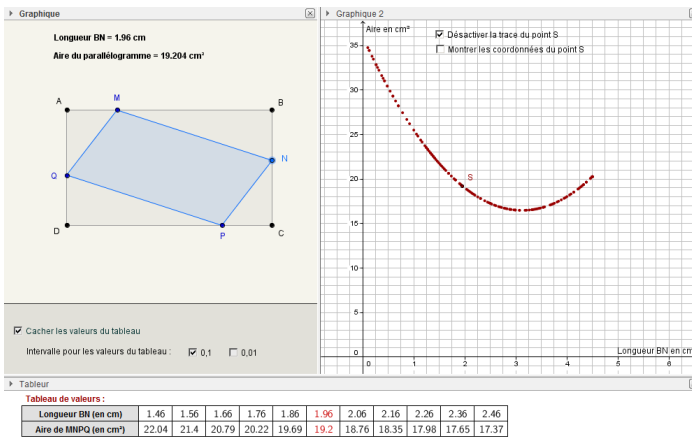
Vue(s) : Graphique Algèbre Tableur Cas 3D

[parallelogramme_qui_tourne_prof.ggb](#)
[parallelogramme_qui_tourne_eleve.ggb](#)



<http://url.univ-lirm.fr/e151>

2 Captures d'écran



3 Commentaires

Intérêt pédagogique :

Présenter une nouvelle notion sous différents aspects.

Exploitation possible en classe :

Ce fichier permet de corriger l'activité correspondant au problème ci-dessous :

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 8$ et $BC = 4,5$.

- Soit N un point libre du segment $[BC]$.
- Soit M un point de $[AB]$ tel que $AM = BN$.
- Soit P un point de $[DC]$ tel que $CP = BN$.
- Soit Q un point de $[AD]$ tel que $DQ = CP$.

Où faut-il placer N pour que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit la plus petite possible?

Cet exercice peut servir à l'introduction de la notion de fonction. Il a l'avantage de ne pas avoir de solution géométrique simple, et la notion de fonction semble être le bon outil pour résoudre le problème. Pour un scénario possible, on pourra consulter la page suivante : http://pegame.ens-lyon.fr/activite.php?rubrique=1&id_theme=11&id_activite=48&code_niveau=N10.

4 Réalisation technique

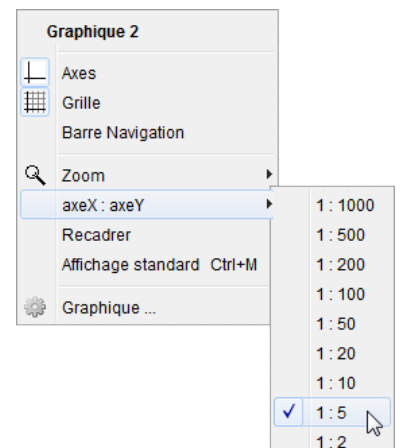
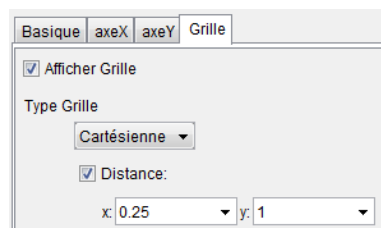
Dans cette partie nous décrivons la réalisation technique de la version corrigée du fichier.

[Les manipulations qui suivent concernent la vue **Graphique**]

❶ Préparation de la zone de travail

- Utiliser le menu **Affichage** pour montrer les vues **Graphique**, **Graphique 2** et **Tableur**.
- Dans la vue **Graphique**, faire disparaître l'affichage des axes ainsi que de la grille.
- Dans la vue **Graphique 2**, afficher les axes ainsi que la grille.

- choisir un rapport d'échelles égal à $\frac{1}{5}$ pour l'affichage des axes;
- dans les paramètres de la grille, choisir une distance de séparation entre deux lignes verticales égale à 0,25 et une distance de séparation égale à 1 entre deux lignes horizontales.



- Organiser les différentes vues de telle sorte à ce que les vues **Graphique** et **Graphiques 2** soient côte-à-côte, avec la vue **Tableur** située sous les vues **Graphique** et **Graphique 2**.

❷ Le rectangle et le parallélogramme

- En utilisant la zone de saisie, créer le point D de coordonnées $(0;0)$: $D=(0,0)$.



- En utilisant la zone de saisie, créer le point C de coordonnées $(8;0)$: $C=(8,0)$.




- En utilisant la zone de saisie, créer le point B de coordonnées $(8;4,5)$: $B=(8,4,5)$.

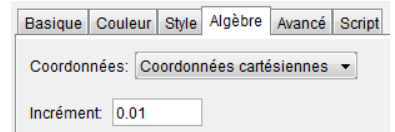








- En utilisant la zone de saisie, créer le point A de coordonnées $(0;4,5)$: $A=(0,4,5)$.




- Utiliser l'outil  pour construire le rectangle $ABCD$.

- Avec l'outil , placer un point N libre sur le segment $[BC]$.
- Ouvrir le panneau des propriétés du point N , et, dans l'onglet **Algèbre**, choisir un incrément égal à 0,01.

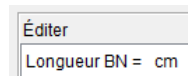


- Sélectionner l'outil , puis désigner successivement les points B , N et A pour créer le cercle de centre A et de rayon BN .
- Avec l'outil , créer le point M , point d'intersection entre le cercle précédemment créé et le segment $[AB]$.
- Utiliser de la même manière les outils  et  pour créer les points P et Q .
- Avec l'outil , construire le parallélogramme $MNPQ$ et le renommer *aire*.
- Cacher les cercles créés avec l'outil .

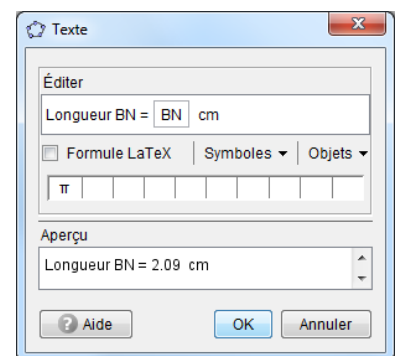
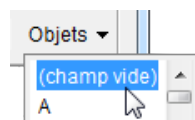
③ Les textes dynamiques


- Sélectionner l'outil , puis cliquer sur une zone vierge de la vue **Graphique**.


- dans la rubrique **Éditer** de la boîte de dialogue **Texte**, inscrire :
Longueur BN = cm;



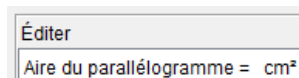
- placer le curseur entre = et cm puis, dans la liste déroulante **Objets**, sélectionner (champ vide);



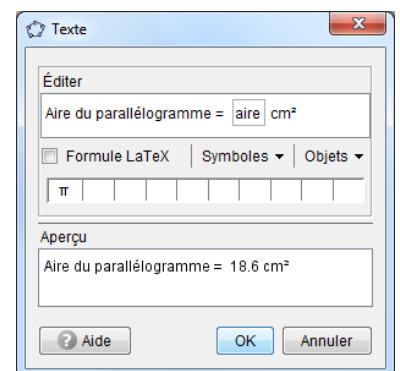
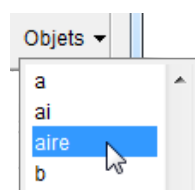
- placer le curseur dans la boîte insérée suite à la manipulation précédente et y inscrire : BN;
- valider en cliquant sur le bouton .


- Sélectionner l'outil , puis cliquer sur une zone vierge de la vue **Graphique**.

- dans la rubrique **Éditer** de la boîte de dialogue **Texte**, inscrire :
Aire du parallélogramme = cm²;




- placer le curseur entre = et cm² puis, dans la liste déroulante **Objets**, sélectionner le polygone *aire*;




- valider en cliquant sur le bouton .

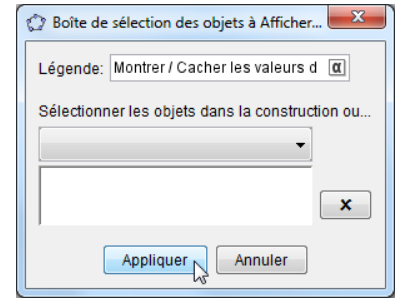
4 Les cases à cocher (1^{re} partie)

- Avec l'outil , créer trois cases à cocher et nommer tabvar, case₁ et case₂ les booléens associés à ces cases.

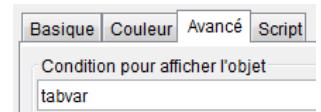
Cacher les valeurs du tableau

Intervalle pour les valeurs du tableau : 0,1 0,01

- Dans la boîte de sélection des objets à afficher/cacher des trois cases à cocher :
 - entrer la légende;
 - ne sélectionner aucun objet;
 - cliquer sur le bouton .

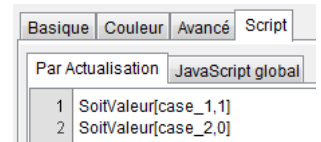


- Ouvrir le panneau des propriétés de la case case₁ :
 - dans l'onglet **Avancé**, inscrire dans le champ **Condition pour afficher l'objet** : tabvar;



- dans l'onglet **Script**, rubrique **Par actualisation**, inscrire :

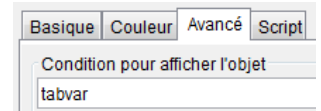
```
SoitValeur[case_1,1]
SoitValeur[case_2,0]
```



- valider en cliquant sur le bouton .

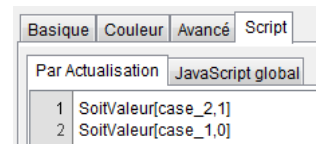
- Ouvrir le panneau des propriétés de la case case₂ :


- dans l'onglet **Avancé**, inscrire dans le champ **Condition pour afficher l'objet** : tabvar;





- dans l'onglet **Script**, rubrique **Par actualisation**, inscrire :

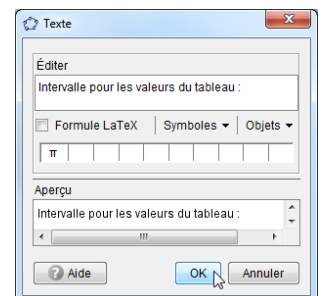
```
SoitValeur[case_2,1]
SoitValeur[case_1,0]
```





- valider en cliquant sur le bouton .

- Sélectionner l'outil , puis cliquer sur une zone vierge de la vue **Graphique** :

- dans la rubrique **Éditer** de la boîte de dialogue **Texte**, inscrire :
Intervalle pour les valeurs du tableau ;;
- valider en cliquant sur le bouton .



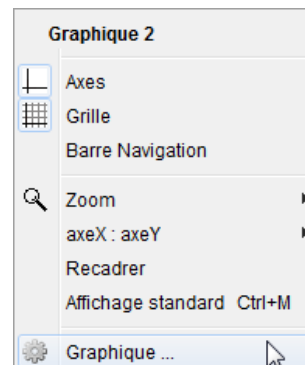
- Positionner l'objet texte ainsi créé devant les cases à cocher case₁ et case₂.
- Utiliser la zone de saisie pour créer la variable numérique pas ainsi définie : pas=**Si**[case₁,0.1,0.01].

Saisie: pas=**Si**[case₁,0.1,0.01]  

[Les manipulations qui suivent concernent la vue **Graphique 2**]

⑤ La légende des axes

- Effectuer un clic avec le bouton droit de la souris sur une zone vierge de la vue **Graphique 2** (aucun objet ne doit être sélectionné) et choisir Graphique... dans le menu contextuel pour faire apparaître la boîte de dialogue **Préférences – Graphique 2**.



- Dans l'onglet **AxeX**, inscrire dans le champ **Label** : Longueur BN en cm.

Label: Longueur BN en cm Unité: []

- Dans l'onglet **AxeY**, inscrire dans le champ **Label** : Aire en cm².

Label: Aire en cm² Unité: []

⑥ Le point S

- En utilisant le champ de saisie, créer la variable numérique d ainsi définie : $d=BN$.

Saisie: $d=BN$ [] []

- En utilisant la zone de saisie, créer le point S de coordonnées (d; aire) : $S=(d, aire)$.

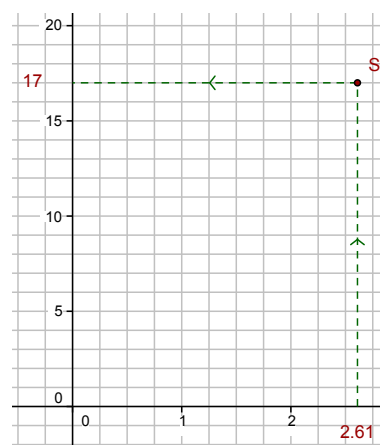
Saisie: $S=(d,aire)$ [] []


- En utilisant la zone de saisie, créer le point S_x ainsi défini : $S_x=(x(S), 0)$.

Saisie: $S_x=(x(S),0)$ [] []

- En utilisant la zone de saisie, créer le point S_y ainsi défini : $S_y=(0, y(S))$.

Saisie: $S_y=(0,y(S))$ [] []



- Avec l'outil , construire les segments $[SS_x]$ et $[SS_y]$.

- Ouvrir le panneau des propriétés des segments $[SS_x]$ et $[SS_y]$:
 - dans l'onglet **Style**, choisir un mode de représentation en pointillés;

Style du trait: [-----] []

- dans l'onglet **Codage**, sélectionner le codage avec une flèche simple.

Codage: [→] []

- Cacher les points S_x et S_y .
- Dans le champ de saisie, inscrire : $abscisse_S="" + BN$.

Saisie: $abscisse_S="" + BN$ [] []

- Dans le champ de saisie, inscrire : $ordonnée_S="" + aire$.

Saisie: $ordonnée_S="" + aire$ [] []

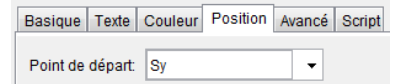
- Ouvrir le panneau des propriétés de l'objet texte $abscisse_S$:
 - choisir sa couleur et sa mise en forme;
 - dans l'onglet **Position**, choisir S_x dans la liste déroulante **Point de départ**.

Basique Texte Couleur Position Avancé Script

Point de départ: S_x []


- Ouvrir le panneau des propriétés de l'objet texte $ordonnée_S$:
 - choisir sa couleur et sa mise en forme;

- dans l'onglet **Position**, choisir Sy dans la liste déroulante **Point de départ**.



- Positionner avec précision les objets texte abscisse_S et ordonnée_S.

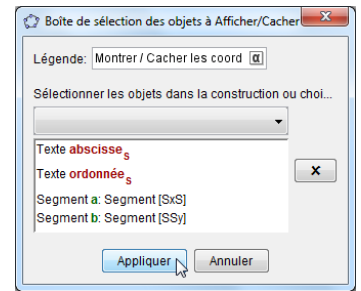
⑦ Les cases à cocher (2^e partie)

- Avec l'outil  créer deux cases à cocher et nommer ptS et coor les booléens associés à ces cases.

- Activer la trace du point S
- Cacher les coordonnées du point S

Dans la boîte de sélection des objets à afficher/cacher, sélectionner :

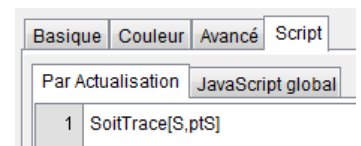
- Case ptS : ne rien sélectionner, entrer la légende et cliquer sur le bouton **Appliquer** ;
- Case coor : les segments [SS_x] et [SS_y] et les objets texte abscisse_S et ordonnée_S.



- Pour faire en sorte que la case ptS permette d'activer ou de désactiver la trace du point S, on affecte un script à cette case :

- ouvrir le panneau des propriétés de la case ptS ;
- dans l'onglet **Script**, onglet **Par actualisation**, inscrire :

```
SoitTrace[S,ptS]
```



- valider en cliquant sur le bouton **OK**.

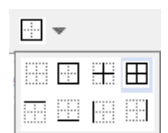
[Les manipulations qui suivent concernent la vue **Tableur**]

⑧ Mise en forme du tableau de valeurs

- Dans la cellule B1, inscrire : Tableau de valeurs.
- Dans la cellule B2, inscrire : Longueur BN (en cm).
- Dans la cellule B3, inscrire : Aire de MNPQ (en cm²).

Tableur	
	A B
1	Tableau de valeurs
2	Longueur BN (en cm)
3	Aire de MNPQ (en cm ²)

- Sélectionner la plage de cellules B2 :M3, et, avec l'outil **Bordures** de la barre de styles, insérer des bordures autour des cellules.



- Utiliser l'outil **Couleur d'arrière-plan** de la barre de styles pour modifier la couleur de fond des cellules B2 et B3.



- Utiliser les sélecteurs d'alignement de la barre de styles pour (éventuellement) modifier les alignements dans les cellules B1, B2 et B3.



9 Les valeurs du tableau

Nous souhaitons (lorsque c'est possible) que la colonne centrale du tableau affiche la valeur courante de la longueur BN et l'aire correspondante du parallélogramme. Bien sûr, lorsque N est proche du point B ou du point C , il convient de décaler l'affichage de BN et de l'aire correspondante dans le tableau. Pour ce faire, nous utiliserons trois listes (voir la fiche technique **Listes et matrices**, page 515) qui permettront d'obtenir les différentes valeurs de la longueur BN à afficher dans le tableau en fonction du pas choisi (cases à cocher case₁ et case₂).

Tableur													
f_x	G	I											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Tableau de valeurs :											
2		Longueur BN (en cm)	0.98	0.99	1	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08
3		Aire de MNPQ (en cm ²)	25.69	25.6	25.52	25.43	25.35	25.26	25.18	25.1	25.01	24.93	24.85
4													

Pour obtenir les valeurs de l'aire du parallélogramme il suffit de définir la fonction qui, à une valeur donnée de la longueur BN , fait correspondre l'aire de $MNPQ$.

Pour que GeoGebra affiche ou non les valeurs du tableau selon l'état de la case tabvar, nous utiliserons une commande **Si** (si tabvar vaut **true**, on affiche les valeurs, sinon on affiche un texte vide).

L'affichage en rouge de la valeur courante de BN et de l'aire correspondante sera obtenu à l'aide des couleurs dynamiques (voir la fiche technique **GeoGebra et la gestion des couleurs**, page 581).

- À l'aide de la zone de saisie, définir la fonction ai ainsi : $ai(x) = 2x^2 - 12.5x + 36$.

Saisie: $ai(x)=2x^2-12.5x+36$

- Cacher la fonction ai .
- Pour obtenir les valeurs de BN lorsque N est proche de B , inscrire dans la zone de saisie :

Liste_1=Séquence[d-pas*Quotient[d,pas]+n,n,0,10*pas,pas]

Saisie: Liste_1=Séquence[d-pas*Quotient[d,pas]+n,n,0,10*pas,pas]

- Pour obtenir les valeurs de BN lorsque N est suffisamment éloigné de B et de C , inscrire dans la zone de saisie :

Liste_2=Séquence[d+n,n,-5*pas,5*pas,pas]

Saisie: Liste_2=Séquence[d+n,n,-5*pas,5*pas,pas]

- Pour obtenir les valeurs de BN lorsque N est proche de C , inscrire dans la zone de saisie :

Liste_3=Retourner[Séquence[4.5-Si[d-pas*Quotient[d,pas]==0,0,pas-(d-pas*Quotient[d,pas])]-n,n,0,10*pas,pas]]

Saisie: Liste_3=Retourner[Séquence[4.5-Si[d-pas*Quotient[d,pas]==0,0,pas-(d-pas*Quotient[d,pas])]-n,n,0,10*pas,pas]]

- Les valeurs de la longueur BN affichées dans le tableau sont stockées dans la liste tabx qui sélectionne les valeurs de Liste₁ ou de Liste₂ ou de Liste₃ en fonction de la position du point N . Pour créer la liste tabx, inscrire dans la zone de saisie :

tabx=Si[b<5*pas,Liste_1,Si[d>4.5-10*pas,Liste_3,Liste_2]]

Saisie: tabx=Si[b<5*pas,Liste_1,Si[d>4.5-10*pas,Liste_3,Liste_2]]

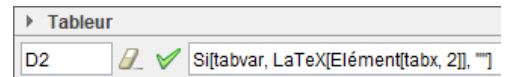
- Pour compléter la première ligne du tableau de valeurs :

- dans la cellule C2, inscrire : **Si**[tabvar, LaTeX[Elément[tabx, 1]], ""] ;

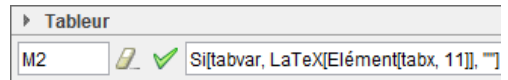
Tableur

C2 Si[tabvar, LaTeX[Elément[tabx, 1]], ""]

- dans la cellule D2, inscrire : `Si[tabvar, LaTeX[Elément[tabx, 2]], ""]`;

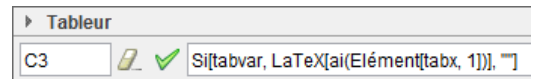


- répéter ainsi la manipulation jusqu'à la cellule M2 en modifiant la valeur de l'indice dans la commande **Elément**.

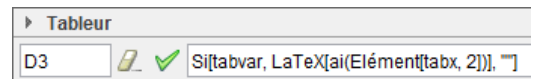


- Pour compléter la seconde ligne du tableau de valeurs :

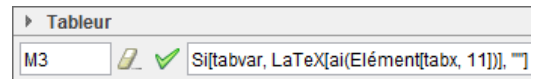
- dans la cellule C3, inscrire : `Si[tabvar, LaTeX[ai(Elément[tabx, 1]), ""]`;



- dans la cellule D3, inscrire : `Si[tabvar, LaTeX[ai(Elément[tabx, 2]), ""]`;



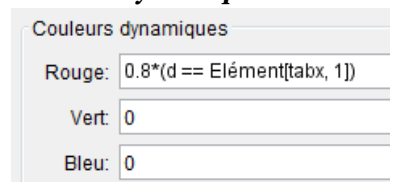
- répéter ainsi la manipulation jusqu'à la cellule M3 en modifiant la valeur de l'indice dans la commande **Elément**.



- Pour obtenir la coloration automatique de la colonne correspondant à la valeur actuelle de la longueur *BN* :

- sélectionner les cellules C2 et C3 et ouvrir leur panneau des propriétés;
- dans l'onglet **Avancé**, compléter de la manière suivante la rubrique **Couleurs dynamiques** :

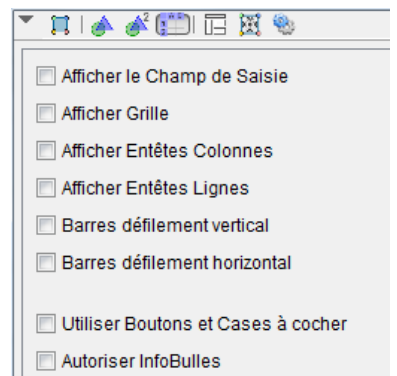
- champ **Rouge** : `0.8*(d==Elément[tabx, 1])`;
- champ **Vert** : `0`;
- champ **Bleu** : `0`.



- répéter ainsi la manipulation jusqu'à la plage de cellules M2 : M3 en modifiant à chaque fois la valeur de l'indice dans la commande **Elément**.

⑩ Finalisation

- Colorier les différents éléments de la figure.
- Ajuster la position des différents objets libres (cases à cocher, textes).
- Ouvrir le menu Options ► Avancé... et, dans la rubrique **Tableur**, onglet **Aspect**, décocher toutes les cases.
- Ajuster la hauteur et la largeur des différentes vues.
- Dans la vue **Graphique**, pour donner l'illusion d'une zone supplémentaire (où sont placées les trois cases à cocher), on peut créer un rectangle défini de la manière suivante :



- sélectionner la vue **Graphique**;
- dans la zone de saisie, créer le point C_1 défini ainsi : `C_1=Coin[1]`;



- dans la zone de saisie, créer le point C_2 défini ainsi : `C_2=Coin[2]`;



- dans la zone de saisie, créer le point C_3 défini ainsi : `C_3=Coin[3]`;



- dans la zone de saisie, créer le point C_4 défini ainsi : $C_4 = \text{Coin}[4]$;

Saisie:

- dans la zone de saisie, créer le point C_5 défini ainsi : $C_5 = C_2 + 0.2 * (C_3 - C_2)$;

Saisie:

- dans la zone de saisie, créer le point C_6 défini ainsi : $C_6 = C_1 + 0.2 * (C_4 - C_1)$;

Saisie:

(selon la hauteur de la vue **Graphique**, modifier le coefficient égal à 0,2 dans la définition des points C_5 et C_6)

- créer le rectangle $C_1C_2C_5C_6$ depuis la zone de saisie en inscrivant : $\text{zone} = \text{Polygone}[C_1, C_2, C_5, C_6]$;

Saisie:

- ouvrir le panneau des propriétés du rectangle et, dans l'onglet **Couleur**, modifier sa couleur et son opacité ;
- pour rendre de nouveau les cases `tabvar`, `case1` et `case2` visibles (car le rectangle ainsi créé recouvre désormais les trois cases à cocher), ouvrir le panneau des propriétés de ces cases, et, dans l'onglet **Avancé**, sélectionner le calque de niveau 1 ;

Calque:

- cacher les points C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6 .

- En appliquant la technique de la fiche **Rendre dynamique la légende d'une case à cocher (ou d'un bouton, ou ...)** (page 723) pour modifier dynamiquement la légende d'une case à cocher, le script attaché à celles-ci devient :

- case `tabvar` :

```
SoitLégende[tabvar, Si[tabvar==true, "Cacher les valeurs du tableau", "Montrer les valeurs du tableau"]]
```

- case `ptS` :

```
SoitTrace[S, ptS]
SoitLégende[ptS, Si[ptS==true, "Désactiver la trace du point S", "Activer la trace du point S"]]
```

- case `coor` :

```
SoitLégende[coor, Si[coor==true, "Cacher les coordonnées du point S", "Montrer les coordonnées du point S"]]
```

5 Fiche élève

La fiche élève se trouve dans le dossier annexes/Parallélogramme_qui_tourne.

Cliquer sur l'une des trois miniatures ci-dessous pour ouvrir la fiche élève.

Introduction à la notion de fonction

1. Le problème

Il s'agit de résoudre le problème suivant :

ABCD est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 4,5$ cm.
 M est un point du segment [AB].
 N est un point du segment [BC].
 P est un point du segment [CD].
 Q est un point du segment [DA].
 On a $AM = AN = CP = DQ$.
 On fait glisser M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible ?

Dessiner ci-dessous une figure en grandeur réelle et la colorer :

Pour étudier plus en détail la situation proposée par ce problème, l'utilisation d'un logiciel de géométrie paraît appropriée. On utilisera pour ce faire le logiciel GeoGebra gratuitement téléchargeable à l'adresse suivante : <http://www.geogebra.org/>.

Ouvrir le fichier `intro_funct1 GeoGebra` dans votre dossier personnel.

2. Construction du quadrilatère MNPQ

Dans la fenêtre de gauche, ABCD est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 4,5$ cm. Dans la fenêtre de droite, un repère, qui servira plus tard, est également représenté.

- En utilisant le menu **Nouveaux points**, placer un point N sur le segment [BC].
 Par défaut, le nouveau point créé se nomme e_1 - pour le renommer, appuyer immédiatement après avoir créé le nouveau point sur la touche **⌨** ou utiliser la commande **Renommer** du menu contextuel (effectuer un clic avec le bouton droit de la souris sur le point N pour faire apparaître le menu contextuel).
- Effectuer un clic droit sur le point N et choisir le menu **Propriétés...**. Dans l'onglet **Algèbre**, régler l'incrémentation à 0,1. Cela permettra, plus tard, de déplacer le point N avec précision.
- Pour construire le point M sur le segment [AB], utiliser l'outil **Compas** qui permet de reporter la distance entre les points B et N à partir du point A. Cliquer sur B puis sur A et déplacer le cercle jusqu'au point A.
- Utiliser ensuite l'outil **Intersection entre deux objets** pour créer le point M (intersection du cercle puis le côté du rectangle).

Introduction à la notion de fonction

- Recommencer la procédure pour créer les points P et Q.
- Une fois les points M, N, P et Q construits, l'outil **Polygone** permet de construire le quadrilatère MNPQ (on peut modifier le contour de remplissage à l'aide du menu contextuel : **Propriétés...**, puis onglet **Couleur**).
- Cacher les cercles en effectuant un clic avec le bouton droit sur chacun des cercles et en décochant le menu **Afficher l'objet**.
- Afficher la longueur BN à l'aide de l'outil **⌨** (il est possible de déplacer le texte après l'avoir créé).
 Après l'avoir créé, la longueur BN est donc comprise entre et

3. Nature du quadrilatère MNPQ

Pour la suite, on appelle x la longueur du segment [BN].

- Exprimer, en fonction de x : $AM = \dots$ et $DQ = \dots$
- Exprimer, en fonction de x : $BM = \dots$ et $DP = \dots$
- Quelle est la nature des triangles BNM et DQP ? Pourquoi ?
- Exprimer MN^2 en fonction de x :
- Exprimer QP^2 en fonction de x :
- Que peut-on en déduire pour les longueurs MN et QP ?
- On détermine de la même façon que les longueurs et sont égales.
- Quelle est alors la nature du quadrilatère MNPQ ? Pourquoi ?

4. Conjectures

- Faire afficher l'aire du parallélogramme MNPQ en utilisant l'outil **⌨**.
- Déplacer alors le point N et déterminer sa position pour que l'aire du parallélogramme MNPQ soit la plus petite possible.
 Admet-on sans justification que l'aire du parallélogramme MNPQ est minimale quand $x = 4,5$ cm ?

Il semble que l'aire du parallélogramme est minimale quand x vaut
 Et dans ce cas, l'aire du parallélogramme est égale à cm².

Introduction à la notion de fonction

5. Représentation graphique

On désire maintenant représenter graphiquement dans le repère fourni, l'aire du parallélogramme MNPQ en fonction de x .
 Ainsi, dans le repère :

L'axe des abscisses (horizontal) représente	en
L'axe des ordonnées (vertical) représente	en

- En déplaçant le point N, compléter le tableau de valeurs :

Longueur x du segment [BN] en cm	0	0,5	1	1,5	2	3	3,5	3,8	4	4,5
Aire de MNPQ en cm ²	34,11	28,19	16,42	10,9
- Pour chaque colonne complète dans le tableau précédent, créer le point correspondant dans le repère de la fenêtre de droite. Pour y parvenir :
 - sélectionner la fenêtre de droite en cliquant sur « Graphique 2 » (qui passe alors en gris) ;
 - cliquer sur l'outil **Point d'après ses coordonnées** qui ouvre comme promise valeur l'axe des coordonnées du point (nombre sur la 1^{ère} ligne du tableau) et comme seconde valeur, l'ordonnée du point (nombre sur la 2^{ème} ligne du tableau).
 Il est peut-être nécessaire de faire varier les différents points créés à l'aide de la manipulation précédente. Vous pouvez donc effectuer un clic droit sur chacun des points et décocher **Afficher l'objet**.
 Une couleur semble alors se dessiner. Pour la tracer entièrement, nous allons créer un point S dans le repère à partir de ses coordonnées - son abscisse sera égale à la longueur BN et son ordonnée égale à l'aire du parallélogramme MNPQ.
- Sélectionner la fenêtre de droite en cliquant sur « Graphique 2 » (qui passe alors en gris).
- Utiliser l'outil **Point d'après ses coordonnées** pour construire un point dont :
 - l'abscisse vaut : l'abscisse de B ;
 - l'ordonnée vaut : l'aire de MNPQ.
 Renommer et modifier la couleur du point nouvellement créé.
- Déterminer, quand on déplace le point N, le point S se déplace également. Pour obtenir la représentation graphique de l'aire du parallélogramme en fonction de la valeur de x , il convient de garder la trace du point S quand on déplace le point N.
- Effectuer un clic droit sur le point S et sélectionner la commande **Tracer active**.
- Déplacer le point N pour obtenir la **représentation graphique** souhaitée.

6. Calcul de l'aire du parallélogramme en fonction de x

L'aire du parallélogramme MNPQ s'obtient en retranchant l'aire des quatre triangles AMQ, BMN, CPN et DQP à l'aire du rectangle ABCD.

On détermine facilement que les triangles AMQ et CPN ont les mêmes dimensions, ainsi que les triangles BMN et DQP - il suffit donc de calculer les aires des triangles AMQ et BMN.

- Exprimer l'aire du triangle AMQ en fonction de x :
- Exprimer l'aire du triangle BMN en fonction de x :
- En déduisant l'expression de l'aire du parallélogramme MNPQ en fonction de x :

Introduction à la notion de fonction

La version corrigée de la fiche élève est également disponible.

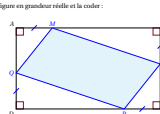
Introduction à la notion de fonction

1. Le problème

Il s'agit de résoudre le problème suivant :

ABCD est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 4,5$ cm.
 M est un point du segment [AB].
 N est un point du segment [BC].
 P est un point du segment [CD].
 Q est un point du segment [DA].
 On a $AM = AN = CP = DQ$.
 On fait glisser M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible ?

Dessiner ci-dessous une figure en grandeur réelle et la colorer :



Pour étudier plus en détail la situation proposée par ce problème, l'utilisation d'un logiciel de géométrie paraît appropriée. On utilisera pour ce faire le logiciel GeoGebra gratuitement téléchargeable à l'adresse suivante : <http://www.geogebra.org/>.

Ouvrir le fichier `intro_funct1 GeoGebra` dans votre dossier personnel.

2. Construction du quadrilatère MNPQ

Dans la fenêtre de gauche, ABCD est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 4,5$ cm. Dans la fenêtre de droite, un repère, qui servira plus tard, est également représenté.

- En utilisant le menu **Nouveaux points**, placer un point N sur le segment [BC].
 Par défaut, le nouveau point créé se nomme e_1 - pour le renommer, appuyer immédiatement après avoir créé le nouveau point sur la touche **⌨** ou utiliser la commande **Renommer** du menu contextuel (effectuer un clic avec le bouton droit de la souris sur le point N pour faire apparaître le menu contextuel).
- Effectuer un clic droit sur le point N et choisir le menu **Propriétés...**. Dans l'onglet **Algèbre**, régler l'incrémentation à 0,1. Cela permettra, plus tard, de déplacer le point N avec précision.
- Pour construire le point M sur le segment [AB], utiliser l'outil **Compas** qui permet de reporter la distance entre les points B et N à partir du point A. Cliquer sur B puis sur A et déplacer le cercle jusqu'au point A.
- Utiliser ensuite l'outil **Intersection entre deux objets** pour créer le point M (intersection du cercle puis le côté du rectangle).

Introduction à la notion de fonction

- Recommencer la procédure pour créer les points P et Q.
- Une fois les points M, N, P et Q construits, l'outil **Polygone** permet de construire le quadrilatère MNPQ (on peut modifier le contour de remplissage à l'aide du menu contextuel : **Propriétés...**, puis onglet **Couleur**).
- Cacher les cercles en effectuant un clic avec le bouton droit sur chacun des cercles et en décochant le menu **Afficher l'objet**.
- Afficher la longueur BN à l'aide de l'outil **⌨** (il est possible de déplacer le texte après l'avoir créé).
 Après l'avoir créé, la longueur BN est donc comprise entre **0 cm** et **4,5 cm**.

3. Nature du quadrilatère MNPQ

Pour la suite, on appelle x la longueur du segment [BN].

- Exprimer, en fonction de x : $AM = x$ et $DQ = x$
- Exprimer, en fonction de x : $BM = 8 - x$ et $DP = 8 - x$
- Quelle est la nature des triangles BNM et DQP ? Pourquoi ?
 Puisque ABCD est un rectangle, il a quatre angles droits.
 Les triangles BNM et DQP sont donc respectivement rectangles en B et en D.
- Exprimer MN^2 en fonction de x : Dans le triangle BNM rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $MN^2 = BM^2 + BN^2$.
 En remplaçant : $MN^2 = (8 - x)^2 + x^2$.
- Exprimer QP^2 en fonction de x : Dans le triangle DQP rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore : $QP^2 = DP^2 + DQ^2$.
 En remplaçant : $QP^2 = (8 - x)^2 + x^2$.
- Que peut-on en déduire pour les longueurs MN et QP ? Puisque $MN^2 = QP^2$, et puisque MN et QP sont des nombres positifs, alors, $MN = QP$.
- On détermine de la même façon que les longueurs NP et MQ sont égales.
- Quelle est alors la nature du quadrilatère MNPQ ? Pourquoi ? Les côtés opposés de MNPQ ont la même longueur. Or, si un quadrilatère (non croisé) a ses côtés opposés de même longueur, c'est un parallélogramme. Donc MNPQ est un parallélogramme.

4. Conjectures

- Faire afficher l'aire du parallélogramme MNPQ en utilisant l'outil **⌨**.
- Déplacer alors le point N et déterminer sa position pour que l'aire du parallélogramme MNPQ soit la plus petite possible.
 Admet-on sans justification que l'aire du parallélogramme MNPQ est minimale quand $x = 4,5$ cm ?

Il semble que l'aire du parallélogramme est minimale quand x vaut **3,12 cm**.
 Et dans ce cas, l'aire du parallélogramme est égale à **16,405 cm²**.

Introduction à la notion de fonction

5. Représentation graphique

On désire maintenant représenter graphiquement dans le repère fourni, l'aire du parallélogramme MNPQ en fonction de x .
 Ainsi, dans le repère :

L'axe des abscisses (horizontal) représente	la longueur BN	en	cm
L'axe des ordonnées (vertical) représente	l'aire du parallélogramme MNPQ	en	cm ²

- En déplaçant le point N, compléter le tableau de valeurs :

Longueur x du segment [BN] en cm	0	0,5	0,7	1	1,5	2	3	3,5	3,8	4	4,5
Aire de MNPQ en cm ²	34,11	28,19	25,25	23,25	18	16,42	16,42	16,42	17,28	17,28	20,25
- Pour chaque colonne complète dans le tableau précédent, créer le point correspondant dans le repère de la fenêtre de droite. Pour y parvenir :
 - sélectionner la fenêtre de droite en cliquant sur « Graphique 2 » (qui passe alors en gris) ;
 - cliquer sur l'outil **Point d'après ses coordonnées** qui ouvre comme promise valeur l'axe des coordonnées du point (nombre sur la 1^{ère} ligne du tableau) et comme seconde valeur, l'ordonnée du point (nombre sur la 2^{ème} ligne du tableau).
 Il est peut-être nécessaire de faire varier les différents points créés à l'aide de la manipulation précédente. Vous pouvez donc effectuer un clic droit sur chacun des points et décocher **Afficher l'objet**.
 Une couleur semble alors se dessiner. Pour la tracer entièrement, nous allons créer un point S dans le repère à partir de ses coordonnées - son abscisse sera égale à la longueur BN et son ordonnée égale à l'aire du parallélogramme MNPQ.
- Sélectionner la fenêtre de droite en cliquant sur « Graphique 2 » (qui passe alors en gris).
- Utiliser l'outil **Point d'après ses coordonnées** pour construire un point dont :
 - l'abscisse vaut : l'abscisse de B ;
 - l'ordonnée vaut : l'aire de MNPQ.
 Renommer et modifier la couleur du point nouvellement créé.
- Déterminer, quand on déplace le point N, le point S se déplace également. Pour obtenir la représentation graphique de l'aire du parallélogramme en fonction de la valeur de x , il convient de garder la trace du point S quand on déplace le point N.
- Effectuer un clic droit sur le point S et sélectionner la commande **Tracer active**.
- Déplacer le point N pour obtenir la **représentation graphique** souhaitée.

6. Calcul de l'aire du parallélogramme en fonction de x

L'aire du parallélogramme MNPQ s'obtient en retranchant l'aire des quatre triangles AMQ, BMN, CPN et DQP à l'aire du rectangle ABCD.

On détermine facilement que les triangles AMQ et CPN ont les mêmes dimensions, ainsi que les triangles BMN et DQP - il suffit donc de calculer les aires des triangles AMQ et BMN.

- Exprimer l'aire du triangle AMQ en fonction de x : $16,5 - x(1-x)$
- Exprimer l'aire du triangle BMN en fonction de x : $0,5x + 0,5x^2$
- En déduisant l'expression de l'aire du parallélogramme MNPQ en fonction de x :

$$\text{Aire de MNPQ} = \text{Aire de ABCD} - 2 \times \text{Aire de AMQ} - 2 \times \text{Aire de BMN}$$

$$\text{Aire de MNPQ} = 36 - 2x + x^2 - 2x + x^2 = 36 - 4x + 2x^2 = 2x^2 - 4x + 36$$

$$\text{Aire de MNPQ} = 36 - 4x + 2x^2 = 2(x^2 - 2x + 18) = 2(x^2 - 2x + 1) + 34 = 2(x-1)^2 + 34$$

Introduction à la notion de fonction