

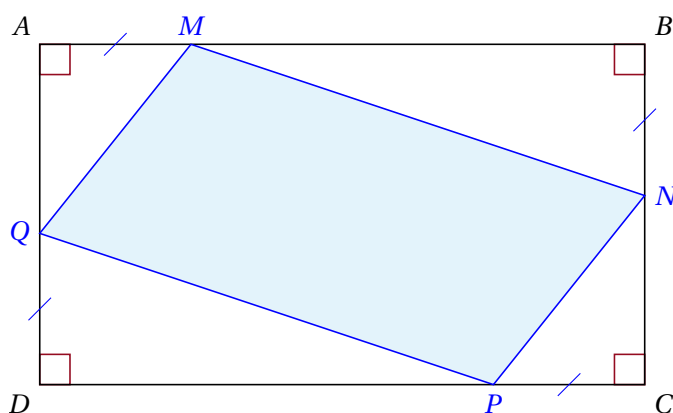
Introduction à la notion de fonction

1 Le problème

⇒ Il s'agit de résoudre le problème suivant :

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 4,5$ cm.
 M est un point du segment $[AB]$.
 N est un point du segment $[BC]$.
 P est un point du segment $[CD]$.
 Q est un point du segment $[DA]$.
Avec $AM = BN = CP = DQ$.
Où faut-il placer M pour que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit la plus petite possible ?

Dessiner ci-dessous une figure en grandeur réelle et la coder :





Pour étudier plus en détails la situation proposée par ce problème, l'utilisation d'un logiciel de géométrie paraît appropriée. On utilisera pour ce faire le logiciel GeoGebra gratuitement téléchargeable à l'adresse suivante : <http://www.geogebra.org/>.



Ouvrir le fichier `intro_fonction.ggb` situé dans votre dossier personnel.

2 Construction du quadrilatère $MNPQ$

Dans la fenêtre de gauche, $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 4,5$ cm. Dans la fenêtre de droite, un repère, qui servira plus tard est également représenté.

- 1) En utilisant le menu **Nouveau point** , placer un point N sur le segment $[BC]$.
Par défaut, le nouveau point créé se nomme « E » ; pour le renommer, appuyer immédiatement après avoir créé le nouveau point sur la touche **N** ou utiliser la commande **Renommer** du menu contextuel (effectuer un clic avec le bouton droit de la souris sur le point E pour faire apparaître le menu contextuel).
- 2) Effectuer un clic droit sur le point N et choisir le menu **Propriétés...** Dans l'onglet **Algèbre**, régler l'incrément à 0,01. Cela permettra, plus tard, de déplacer le point N avec précision.
- 3) Pour construire le point M sur le segment $[AB]$, utiliser l'outil **Compas**  qui permet de reporter la distance entre les points B et N à partir du point A (cliquer sur B puis sur N et déplacer le cercle jusqu'au point A).

Utiliser ensuite l'outil **Intersection entre deux objets**  pour créer le point M (sélectionner le cercle puis le côté du rectangle).

- 4) Recommencer la procédure pour créer les points P et Q .
- 5) Une fois les points M , N , P et Q construits, l'outil **Polygone**  permet de construire le quadrilatère $MNPQ$ (on peut modifier la couleur de remplissage à l'aide du menu contextuel : **Propriétés...** puis onglet **Couleur**).
- 6) Cacher les cercles en effectuant un clic avec le bouton droit sur chacun des cercles et en décochant le menu **Afficher l'objet**.
- 7) Afficher la longueur BN à l'aide de l'outil  (il est possible de déplacer le texte après l'avoir créé).




D'après l'énoncé, la longueur BN est donc comprise entre **0 cm** et **4,5 cm**

3 Nature du quadrilatère $MNPQ$

Pour la suite, on appelle x la longueur du segment $[BN]$.

- 1) Exprimer, en fonction de x : $AM =$ **x** et $DQ =$ **x**
- 2) Exprimer, en fonction de x : $BM =$ **$8 - x$** et $DP =$ **$8 - x$**
- 3) Quelle est la nature des triangles BNM et DQP ? Pourquoi?
Puisque $ABCD$ est un rectangle, il a quatre angles droits.
Ainsi les angles \widehat{MBN} et \widehat{QDP} sont droits.
Les triangles BNM et DQP sont donc respectivement rectangles en B et en D .
- 4) Exprimer MN^2 en fonction de x : **Dans le triangle BNM rectangle en B ,**
d'après le théorème de Pythagore : $MN^2 = BM^2 + BN^2$.
En remplaçant : $MN^2 = (8 - x)^2 + x^2$
- 5) Exprimer QP^2 en fonction de x : **Dans le triangle DQP rectangle en D ,**
d'après le théorème de Pythagore : $QP^2 = DP^2 + DQ^2$.
En remplaçant : $QP^2 = (8 - x)^2 + x^2$
- 6) Que peut-on en déduire pour les longueurs MN et QP ? **Puisque $MN^2 = QP^2$, et puisque MN et QP sont des nombres positifs, alors, $MN = QP$.**
- 7) On démontre de la même façon que les longueurs **NP** et **MQ** sont égales.
- 8) Quelle est alors la nature du quadrilatère $MNPQ$? Pourquoi? **Les côtés opposés de $MNPQ$ ont la même longueur. Or, si un quadrilatère (non croisé) a ses côtés opposés de même longueur, c'est un parallélogramme. Donc $MNPQ$ est un parallélogramme.**

4 Conjecture

- 1) Faire afficher l'aire du parallélogramme $MNPQ$ en utilisant l'outil .
- 2) Déplacer alors le point N et déterminer sa position pour que l'aire du parallélogramme $MNPQ$ soit la plus petite possible.
Astuce : une fois le point N sélectionné, il est possible de déplacer celui-ci très précisément en utilisant les flèches « haut »  et « bas »  du clavier.

Il semble que l'aire du parallélogramme est minimale quand x vaut **3,12 cm**
 Et dans ce cas, l'aire du parallélogramme est égale à **16,469 cm²**

5 Représentation graphique

On désire maintenant représenter graphiquement dans le repère fourni, l'aire du parallélogramme $MNPQ$ en fonction de x .


Ainsi, dans le repère :

L'axe des abscisses (horizontal) représente	la longueur BN	en	cm
L'axe des ordonnées (vertical) représente	l'aire du parallélogramme $MNPQ$	en	cm ²

- 1) En déplaçant le point N , compléter le **tableau de valeurs** :

Longueur x du segment $[BN]$ en cm	0	0,16	0,7	1	1,5	2	3	3,1	3,59	3,8	4	4,5
Aire de $MNPQ$ en cm ²	36	34,11	28,19	25,5	21,75	19	16,5	16,47	16,9	17,38	17,99	20,25

- 2) Pour chaque colonne complétée dans le tableau précédent, créer le point correspondant dans le repère de la fenêtre de droite. Pour y parvenir :

- ☐ sélectionner la fenêtre de droite en cliquant sur « Graphique 2 » (qui passe alors en gras) ;
- ☐ cliquer sur l'outil **Point d'après ses coordonnées**  et fournir comme première valeur l'**abscisse** du point (nombre sur la 1^{re} ligne du tableau) et comme seconde valeur, l'**ordonnée** du point (nombre sur la 2^e ligne du tableau).

Il n'est pas nécessaire ici de nommer les différents points créés à l'aide de la manipulation précédente. Vous pouvez donc effectuer un clic droit sur chacun des points et décocher **Afficher l'étiquette**.

Une courbe semble alors se dessiner. Pour la tracer entièrement, nous allons créer un point S dans le repère à partir de ses coordonnées : son abscisse sera égale à la longueur BN et son ordonnée égale à l'aire du parallélogramme $MNPQ$.

- Sélectionner la fenêtre de droite en cliquant sur « Graphique 2 » (qui passe alors en gras).
- Utiliser l'outil **Point d'après ses coordonnées** pour construire un point dont :
 - ☐ l'abscisse vaut : **Distance**[B,N]
 - ☐ l'ordonnée vaut : **Aire**[M,N,P,Q]
- Renommer et modifier la couleur du point nouvellement créé.
- Désormais, quand on déplace le point N , le point S se déplace également.
Pour obtenir la représentation graphique de l'aire du parallélogramme en fonction de la valeur de x , il convient de garder la trace du point S quand on déplace le point N .
Effectuer un clic droit sur le point S et sélectionner la commande **Trace activée**.
- Déplacer le point N pour obtenir la **représentation graphique** souhaitée.

6 Calcul de l'aire du parallélogramme en fonction de x

L'aire du parallélogramme $MNPQ$ s'obtient en retranchant l'aire des quatre triangles AMQ , BMN , CNP et DQP à l'aire du rectangle $ABCD$.

Or, on démontre facilement que les triangles AMQ et CNP ont les mêmes dimensions, ainsi que les triangles MBN et DQP . Il suffit donc de calculer les aires des triangles AMQ et BMN .

- Exprimer l'aire du triangle AMQ en fonction de x : $x(4,5 - x)/2$
- Exprimer l'aire du triangle MBN en fonction de x : $x(8 - x)/2$

- 3) En déduire l'expression de l'aire du parallélogramme $MNPQ$ en fonction de x :

$$\text{Aire de } MNPQ = \text{Aire de } ABCD - 2 \times \text{Aire de } AMQ - 2 \times \text{Aire de } MBN$$

$$\text{Aire de } MNPQ = 36 - 2 \times \frac{x(4,5 - x)}{2} - 2 \times \frac{x(8 - x)}{2}$$

$$\text{Aire de } MNPQ = 36 - x(4,5 - x) - x(8 - x) = 36 - 4,5x + x^2 - 8x + x^2 = 2x^2 - 12,5x + 36$$