

Introduction à la notion de fonction

1 Le problème

⇒ Il s'agit de résoudre le problème suivant :

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 4,5$ cm.
 M est un point du segment $[AB]$.
 N est un point du segment $[BC]$.
 P est un point du segment $[CD]$.
 Q est un point du segment $[DA]$.
Avec $AM = BN = CP = DQ$.
Où faut-il placer M pour que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit la plus petite possible ?

Dessiner ci-dessous une figure en grandeur réelle et la coder :





Pour étudier plus en détails la situation proposée par ce problème, l'utilisation d'un logiciel de géométrie paraît appropriée. On utilisera pour ce faire le logiciel GeoGebra gratuitement téléchargeable à l'adresse suivante : <http://www.geogebra.org/>.



Ouvrir le fichier `intro_fonction.ggb` situé dans votre dossier personnel.

2 Construction du quadrilatère $MNPQ$

Dans la fenêtre de gauche, $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 4,5$ cm. Dans la fenêtre de droite, un repère, qui servira plus tard est également représenté.

- 1) En utilisant le menu **Nouveau point** , placer un point N sur le segment $[BC]$.
Par défaut, le nouveau point créé se nomme « E » ; pour le renommer, appuyer immédiatement après avoir créé le nouveau point sur la touche **N** ou utiliser la commande **Renommer** du menu contextuel (effectuer un clic avec le bouton droit de la souris sur le point E pour faire apparaître le menu contextuel).
- 2) Effectuer un clic droit sur le point N et choisir le menu **Propriétés...** Dans l'onglet **Algèbre**, régler l'incrément à 0,01. Cela permettra, plus tard, de déplacer le point N avec précision.
- 3) Pour construire le point M sur le segment $[AB]$, utiliser l'outil **Compas**  qui permet de reporter la distance entre les points B et N à partir du point A (cliquer sur B puis sur N et déplacer le cercle jusqu'au point A).

Utiliser ensuite l'outil **Intersection entre deux objets**  pour créer le point M (sélectionner le cercle puis le côté du rectangle).

- 4) Recommencer la procédure pour créer les points P et Q .
- 5) Une fois les points M , N , P et Q construits, l'outil **Polygone**  permet de construire le quadrilatère $MNPQ$ (on peut modifier la couleur de remplissage à l'aide du menu contextuel : **Propriétés...** puis onglet **Couleur**).
- 6) Cacher les cercles en effectuant un clic avec le bouton droit sur chacun des cercles et en décochant le menu **Afficher l'objet**.
- 7) Afficher la longueur BN à l'aide de l'outil  (il est possible de déplacer le texte après l'avoir créé).




D'après l'énoncé, la longueur BN est donc comprise entre et

3 Nature du quadrilatère $MNPQ$

Pour la suite, on appelle x la longueur du segment $[BN]$.

- 1) Exprimer, en fonction de x : $AM = \dots\dots\dots$ et $DQ = \dots\dots\dots$
- 2) Exprimer, en fonction de x : $BM = \dots\dots\dots$ et $DP = \dots\dots\dots$
- 3) Quelle est la nature des triangles BNM et DQP ? Pourquoi?
.....
.....
.....
- 4) Exprimer MN^2 en fonction de x :
.....
.....
- 5) Exprimer QP^2 en fonction de x :
.....
.....
- 6) Que peut-on en déduire pour les longueurs MN et QP ?
.....
- 7) On démontre de la même façon que les longueurs et sont égales.
- 8) Quelle est alors la nature du quadrilatère $MNPQ$? Pourquoi?
.....
.....

4 Conjecture

- 1) Faire afficher l'aire du parallélogramme $MNPQ$ en utilisant l'outil .
- 2) Déplacer alors le point N et déterminer sa position pour que l'aire du parallélogramme $MNPQ$ soit la plus petite possible.
Astuce : une fois le point N sélectionné, il est possible de déplacer celui-ci très précisément en utilisant les flèches « haut »  et « bas »  du clavier.

Il semble que l'aire du parallélogramme est minimale quand x vaut
Et dans ce cas, l'aire du parallélogramme est égale à

5 Représentation graphique

On désire maintenant représenter graphiquement dans le repère fourni, l'aire du parallélogramme $MNPQ$ en fonction de x .


Ainsi, dans le repère :

L'axe des abscisses (horizontal) représente en
 L'axe des ordonnées (vertical) représente en

- 1) En déplaçant le point N , compléter le **tableau de valeurs** :

Longueur x du segment $[BN]$ en cm	0			1	1,5	2	3			3,8	4	4,5
Aire de $MNPQ$ en cm^2		34,11	28,19					16,47	16,9			

- 2) Pour chaque colonne complétée dans le tableau précédent, créer le point correspondant dans le repère de la fenêtre de droite. Pour y parvenir :

- ☐ sélectionner la fenêtre de droite en cliquant sur « Graphique 2 » (qui passe alors en gras) ;
- ☐ cliquer sur l'outil **Point d'après ses coordonnées**  et fournir comme première valeur l'**abscisse** du point (nombre sur la 1^{re} ligne du tableau) et comme seconde valeur, l'**ordonnée** du point (nombre sur la 2^e ligne du tableau).

Il n'est pas nécessaire ici de nommer les différents points créés à l'aide de la manipulation précédente. Vous pouvez donc effectuer un clic droit sur chacun des points et décocher **Afficher l'étiquette**.

Une courbe semble alors se dessiner. Pour la tracer entièrement, nous allons créer un point S dans le repère à partir de ses coordonnées : son abscisse sera égale à la longueur BN et son ordonnée égale à l'aire du parallélogramme $MNPQ$.

- 1) Sélectionner la fenêtre de droite en cliquant sur « Graphique 2 » (qui passe alors en gras).
- 2) Utiliser l'outil **Point d'après ses coordonnées** pour construire un point dont :
 - ☐ l'abscisse vaut : **Distance** $[B, N]$
 - ☐ l'ordonnée vaut : **Aire** $[M, N, P, Q]$
- 3) Renommer et modifier la couleur du point nouvellement créé.
- 4) Désormais, quand on déplace le point N , le point S se déplace également.
 Pour obtenir la représentation graphique de l'aire du parallélogramme en fonction de la valeur de x , il convient de garder la trace du point S quand on déplace le point N .
 Effectuer un clic droit sur le point S et sélectionner la commande **Trace activée**.
- 5) Déplacer le point N pour obtenir la **représentation graphique** souhaitée.

6 Calcul de l'aire du parallélogramme en fonction de x

L'aire du parallélogramme $MNPQ$ s'obtient en retranchant l'aire des quatre triangles,, et à l'aire du rectangle $ABCD$.

Or, on démontre facilement que les triangles AMQ et ont les mêmes dimensions, ainsi que les triangles MBN et Il suffit donc de calculer les aires des triangles AMQ et BMN .

- 1) Exprimer l'aire du triangle AMQ en fonction de x :
- 2) Exprimer l'aire du triangle MBN en fonction de x :
- 3) En déduire l'expression de l'aire du parallélogramme $MNPQ$ en fonction de x :

.....

